CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 1, No 1, 2020
DOI: 10.25037/cj.v1i1.9

JOURNAL OF
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

On Chromatic Number of Graph Operation

Kiki Kurdianto[1,2], Ika Hesti A.[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT- University of Jember
[2]Department of Mathematics Education - University of Jember
[3]Department of Information System - University of Jember
desytripuspasari@gmail.com; d.dafik@unej.ac.id; slamin@unej.ac.id

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be connected nontrivial graph. Edge coloring is defined as $c : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}, k \in N$, with the conditions no edges adjacent having the same color. Coloring k-color edges r-dynamic is edges coloring as much as k color such that every edges in $E(G)$ with adjacent at least $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ have different color. An Edge r dynamic is a proper c of $E(G)$ such that $|c(N(uv))| = \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, for each edge $N(uv)$ is the neighborhood of uv and $c(N(uv))$ is color used to with adjacent edges of uv. the edge r-dynamic chromatic number, written as $\lambda(G)$, is the minimum k such that G has an edge r-dynamic k-coloring. chromatic number 1-dynamic written as $\lambda(G)$, chromatic number 2-dynamic written as $\lambda_d(G)$ And for chromatic number r-dynamic written as $\lambda_(G)$. A graph is used in this research namely $gshack(H_3, e, n)$, $amal(Bt_3, v, n)$ and $amal(S_4, v, n)$.

Keywords: r-dynamic coloring, r-dynamic chromatic number, graph operations.
Mathematic Subject Clasification: 05C15

Pendahuluan

Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yaitu himpunan V dan E. Himpunan V merupakan himpunan yang elemen-elemennya dinamakan titik (*vertex*). Himpunan E merupakan himpunan yang elemen-elemennya dinamakan sisi (*edge*). Sehingga suatu graf G dapat disimbolkan $G(V,E)$. Sebuah graf G dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Sebuah graf yang tidak memiliki sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut dengan graf trivial [10]. Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke suatu sembarang himpunan. Jika daerah asal adalah sebuah sisi disebut dengan pewarnaan sisi. Jika daerah asal adalah titik maka disebut dengan pewarnaan titik [?]. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak-trivial. Suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi G didefinisikan sebagai $c : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}, k \in N$, dimana dua sisi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Penggunaan warna yang palng minimum disebut dengan bilangan kromatik, dan selalu memenuhi Teorema 1 sebagai berikut.

Teorema 1 *Jika G adalah graf sederhana, maka* $\Delta(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta(G) + 1$

Received: 12 20, 2019; **Revised:** 02 05, 2020; **Accepted:** 03 25, 2020; **Published:** 06 26, 2020

Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan sisi r-dinamis yang digeneralisasikan dari pewarnaan titik r- dinamis. Pewarnaan k-warna sisi r-dinamis merupakan pewarnaan sisi untuk setiap uv di $E(G)$ sedemikian sehingga $|c(N(uv))| = \min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, dimana $N(uv)$ merupakan ketetanggaan dari uv dan $c(N(uv))$ merupakan warna yang digunakan oleh sisi ketetanggaan dari uv. Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k-warna sisi r-dinamis disebut dengan bilangan kromatik sisi r dinamis yang dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$ [2]. Untuk mendapatkan nilai kromatik r dinamis dirumuskan oleh Observasi 1 sebagai berikut.

Observasi 1 *Misal G adalah graf terhubung dan λ merupakan bilangan kromatik dinamis maka berlaku $\lambda_r(G) \leq \lambda_{r+1}(G)$.* [**?**]

Berikut beberapa definisi operasi graf yang dipakai dalam penelitian ini.

Definisi 1 *Shackle dari graf H dinotasikan dengan $G = shack(H, v, n)$ adalah graf G yang dibangun dari graf non trivial $H_1, H_2, ..., H_n$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq s, t \leq n$, H_s dan H_t tidak memiliki titik penghubung dimana $|s - t| \geq 2$ dan untuk setiap $1 \leq i \leq n - 1$, H_i dan H_{i+1} memiliki tepat satu titik bersama* v*, disebut dengan titik penghubung dan $k - 1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan* generalized shackle*, dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$ [**?**].*

Definisi 2 *Amalgamasi dinotasikan dengan $G = Amal(H, v, n)$ dimana setiap H memiliki sebuah titik v yang menjadi titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf H yang diamalgamasi [1].*

Terdapat beberapa hasil penelitian pewarnaan sisi r dinamis sebelumnya, seperti Meganingtyas pada tesisya melakukan pewarnaan sisi r dinamis pada graf khusus diantaranya yaitu graf lintasan (P_n), graf sikel (C_n), graf bintang (S_n), graf roda (W_n), graf friendship (F_n), dan graf amalgamasi lintasan [**?**]. Pada penelitian ini, penulis akan mengangkat masalah bagaimana menemukan nilai kromatik pewarnaan sisi r-dinamis graf hasil operasi.

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait pewarnaan sisi r-dinamis pada graf hasil operasi. Teorema yang pertama adalah nilai kromatik pada pewarnaan sisi r-dinamis dari graf $gshack(H_3, e, n)$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 0.1** *Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r-dinamis pada graf $G = gshack(H_3, e, n)$ adalah:*

$$\lambda(gshack(H_3, e, n)) = \lambda_d(gshack(H_3, e, n)) = \lambda_3(gshack(H_3, e, n)) = 4$$
$$\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) = 6$$
$$\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) = 7$$
$$\lambda_{r\geq 6}(gshack(H_3, e, n)) = 9$$

Bukti.$Gshack(H_3, e, n)$, dengan $n \geq 3$ memiliki himpunan titik dan himpunan sisi $V(gshack(H_3, e, n)) = \{w_i, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 2n + 2\}$ dan $E(gshack(H_3, e, n)) = \{w_ix_i, x_iy_i, x_iz_{2i}, x_iz_{2i+1},\ y_iz_{2i}, y_iz_{2i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_iz_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n + 1\}$, sehingga $| V(gshack(H_3, e,\ n)) |= 5n + 2$ dan $| E(gshack(H_3, e, n)) |= 8n + 1$, serta $\Delta(gshack(H_3, e, n)) = 4$.

Kasus 1. Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\Delta(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta(G) + 1$, sehingga $\lambda(gshack(H_3, e, n)) \geq 4$. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda(gshack(H_3, e, n)) \leq 4$ dengan mewarnai $E(gshack(H_3, e, n))$ seperti pada fungsi c_4. Misal $D = \{1, 2, \ldots,\ k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_4 merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_4 : E(gshack(H_3, e, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$c_4(w_1x_1, w_2x_2, \ldots, w_{n-1}x_{n-1}, w_nx_n) = 11 \ldots 11$$
$$c_4(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_{n-1}y_{n-1}, x_ny_n) = 22 \ldots 22$$
$$c_4(x_1z_2, x_2z_4, \ldots, w_{n-1}z_{2(n-1)}, w_nz_{2n}) = 44 \ldots 44$$
$$c_4(x_1z_3, x_2z_5, \ldots, w_{n-1}z_{2(n+1)}, w_nz_{2n+1}) = 33 \ldots 33$$
$$c_4(y_1z_2, y_2z_4, \ldots, y_{n-1}z_{2(n-1)}, y_nz_{2n}) = 33 \ldots 33$$
$$c_4(y_1z_3, y_2z_5, \ldots, y_{n-1}z_{2(n+1)}, y_nz_{2n+1}) = 44 \ldots 44$$
$$c_4(z_1z_2, z_2z_3, \ldots, z_{2n}z_{2n+1}, z_{2n+1}z_{2n+2}) = 1\ 21 \ldots 21$$

Dari fungsi pewarnaan c_4 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah $\lambda(gshack(H_3, e, n)) \leq 4$. Karena $\lambda(gshack(H_3, e, n)) \leq 4$ dan $\lambda(gshack(H_3, e, n)) \geq 4$, maka $\lambda(gshack(H_3, e, n)) = 4$, sehingga $\lambda(gshack(H_3, e, n)) = \lambda_2(gshack\ (H_3, e, n)) = \lambda_3(gshack(H_3, e, n)) = 4$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_4(G) \geq \lambda_3(G)$, maka $\lambda_4(gshack(H_3,$

$e, n)) \geq 4$. Misal $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) = 4$ seperti fungsi pewarnaan c_4 maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi x_1y_1 diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = 5$, $|c(N(e))| = 3$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{4, 5\} = 4$, sehingga $3 \ngeq 4$. Misal $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) = 5$ seperti pewarnaan yang diilustrasikan oleh Gambar 4.7 maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi x_1z_3 diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = 6$, $|c(N(e))| = 3$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{4, 6\} = 4$, sehigga $3 \ngeq 4$. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) \geq 6$.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) \leq 6$ dengan mewarnai $E(gshack(H_3, e, n))$ seperti pada fungsi c_5. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_5 merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_5 : E(gshack(H_3,\ e, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$\begin{gathered}
c_5(w_1x_1, w_2x_2, \ldots, w_{n-1}x_{n-1}, w_nx_n) = 11\ldots11 \\
c_5(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_{n-1}y_{n-1}, x_ny_n) = 22\ldots22 \\
c_5(x_1z_2, x_2z_4, \ldots, w_{n-1}z_{2(n-1)}, w_nz_{2n}) = 44\ldots44 \\
c_5(x_1z_3, x_2z_5, \ldots, w_{n-1}z_{2(n+1)}, w_nz_{2n+1}) = 66\ldots66 \\
c_5(y_1z_2, y_2z_4, \ldots, y_{n-1}z_{2(n-1)}, y_nz_{2n}) = 33\ldots33 \\
c_5(y_1z_3, y_2z_5, \ldots, y_{n-1}z_{2(n+1)}, y_nz_{2n+1}) = 55\ldots55 \\
c_5(z_1z_2, z_2z_3, \ldots, z_{2n}z_{2n+1}, z_{2n+1}z_{2n+2}) = 1\ 21\ldots21
\end{gathered}$$

Dari fungsi pewarnaan c_5 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) \leq 6$. Karena $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) \leq 6$ dan $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) \geq 6$, maka $\lambda_4(gshack(H_3, e, n)) = 6$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_5(G) \geq \lambda_4(G)$, maka $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) \geq 6$. Misal $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) = 6$ seperti fungsi pewarnaan c_5 maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi x_1z_2 diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = 6$, $|c(N(e))| = 4$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{5, 6\} = 5$, maka $4 \ngeq 5$. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) \geq 7$. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) \leq 7$ dengan mewarnai $E(gshack(H_3, e, n))$ seperti pada fungsi c_6. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_6 merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_6 : E(gshack(H_3, e, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$c_6(w_1x_1, w_2x_2, \ldots, w_{n-1}x_{n-1}, w_nx_n) = 11\ldots11$$

$$c_6(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_{n-1}y_{n-1}, x_ny_n) = \begin{cases} 27\ldots27\ 2, & n \text{ ganjil} \\ 27\ldots27, & n \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_6(x_1z_2, x_2z_4, \ldots, w_{n-1}z_{2(n-1)}, w_nz_{2n}) = 44\ldots44$$
$$c_6(x_1z_3, x_2z_5, \ldots, w_{n-1}z_{2(n+1)}, w_nz_{2n+1}) = 66\ldots66$$
$$c_6(y_1z_2, y_2z_4, \ldots, y_{n-1}z_{2(n-1)}, y_nz_{2n}) = 33\ldots33$$
$$c_6(y_1z_3, y_2z_5, \ldots, y_{n-1}z_{2(n+1)}, y_nz_{2n+1}) = 55\ldots55$$
$$c_6(z_1z_2, z_2z_3, \ldots, z_{2n}z_{2n+1}, z_{2n+1}z_{2n+2}) = \begin{cases} 1\ 7121\ldots7121\ 71, & n \text{ ganjil} \\ 1\ 7121\ldots7121, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_6 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) \leq 7$. Karena $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) \leq 7$ dan $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) \geq 7$, maka $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) = 7$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_6(G) \geq \lambda_5(G)$, maka $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) \geq 7$. Misal $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) = 7$ seperti fungsi pewarnaan c_6 maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi x_1z_2 diperoleh $d(u)+d(v)-2 = 6$, $|c(N(e))| = 5$ dan $\min\{r, d(u)+d(v)-2\} = \min\{6, 6\} = 6$, maka $5 \ngeq 6$. Misal $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) = 8$ seperti pewarnaan yang diilustrasikan oleh Gambar 4.8 maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi x_1z_3 diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = 6$, $|c(N(e))| = 5$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{6, 6\} = 6$, maka $5 \ngeq 6$. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) \geq 9$.

Selanjutnya unuk menunjukkan bahwa $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) \leq 9$ dengan mewarnai $E(gshack(H_3, e, n))$ seperti pada fungsi c_7. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_7 merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_7 : E(gshack(H_3, e, n)) \rightarrow D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$c_7(w_1x_1, w_2x_2, \ldots, w_{n-1}x_{n-1}, w_nx_n) = 88\ldots88$$
$$c_7(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_{n-1}y_{n-1}, x_ny_n) = \begin{cases} 27\ldots27\ 2, & n \text{ ganjil} \\ 27\ldots27, & n \text{ genap} \end{cases}$$
$$c_7(x_1z_2, x_2z_4, \ldots, w_{n-1}z_{2(n-1)}, w_nz_{2n}) = 44\ldots44$$
$$c_7(x_1z_3, x_2z_5, \ldots, w_{n-1}z_{2(n+1)}, w_nz_{2n+1}) = 66\ldots66$$
$$c_7(y_1z_2, y_2z_4, \ldots, y_{n-1}z_{2(n-1)}, y_nz_{2n}) = 33\ldots33$$
$$c_7(y_1z_3, y_2z_5, \ldots, y_{n-1}z_{2(n+1)}, y_nz_{2n+1}) = 55\ldots55$$
$$c_7(z_1z_2, z_2z_3, \ldots, z_{2n}z_{2n+1}, z_{2n+1}z_{2n+2}) = \begin{cases} 1\ 7921\ldots7921\ 79, & n \text{ ganjil} \\ 1\ 7921\ldots7921, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_7 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 6-dinamis adalah $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) \leq 9$. Karena $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) \leq 9$ dan $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) \geq 9$, maka $\lambda_6(gshack(H_3, e, n)) = 9$. Pada graf $gshack(H_3, e, n)$ nilai dari $\max\{d(u) + d(v) - 2\} = 6$. Dengan demikian fungsi pewarnaan c_7 juga berlaku untuk r lainnya, dimana $r \geq 6$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 6$ nilai $\min\{r,$

$\max\{d(u) + d(v) - 2\}\} = \max\{d(u) + d(v) - 2\} = 6$. Oleh karena itu, nilai bilangan kromatik dinamis $\lambda_{r>6}(gshack(H_3, e, n)) = \lambda_6(gshack(H_3, e, n)) = 9$. Berdasarkan uraian diatas, maka Teroema 2.1 terbukti. □

Selanjutnya adalah Teorema nilai kromatik pewarnaan sisi r-dinamis dari graf hasil operasi $amal(Bt_3, v, n)$, berikut Teorema beserta pembuktiannya.

◇ **Teorema 0.2** *Untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik sisi r-dinamis pada graf $G = amal(Bt_3, v, n)$ adalah:*

$$\lambda_{r\leq n}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$$
$$\lambda_{n+1\leq r\leq 2n-1}(amal(Bt_3, v, n)) = \begin{cases} 2n+1, & n = 3 \\ 2n, & n > 3 \end{cases}$$
$$\lambda_{r=2n}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 1$$
$$\lambda_{r=2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 3$$
$$\lambda_{r\geq 2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 5$$

Bukti.$Amal(Bt_3, v, n)$ memiliki himpunan titik $V(amal(Bt_3, v, n)) = \{x_i, y_i, z_1^i, z_2^i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{p\}$ dan himpunan sisi $E(Bt_3, v, n)) = \{x_iy_i, x_iz_1^i, x_iz_2^i, px_i, py_i, y_iz_1^i, y_iz_2^i; 1 \leq i \leq n\}$, sehingga $| V(amal(Bt_3, v, n)) |= 4n+1$ dan $| E(amal(Bt_3, v, n)) | = 7n$, serta $\Delta(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$.

Kasus 1. Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\Delta(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta(G) + 1$, sehingga $\lambda(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n$. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n$ dengan mewarnai $E(amal(Bt_3, v, n))$ seperti pada fungsi c_{14}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_{14} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_{14} : E(amal(Bt_3, v, n)) \rightarrow D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

a. untuk $n = 3$

$$c_{14}(px_i) = 2i - 1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{14}(py_i) = 2i; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{14}(x_iy_i) = \begin{cases} 2n-1, & i = 1 \\ 2i-3, & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$
$$c_{14}(x_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+1, & 1 \leq i \leq n-1 \\ 1, & i = n \end{cases}$$
$$c_{14}(y_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+2, & 1 \leq i \leq n-1 \\ 2, & i = n \end{cases}$$

$$c_{14}(x_iz_2^i) = \begin{cases} 6, \ i = 1 \\ 2i-2, \ 2 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

$$c_{14}(y_iz_2^i) = 2i-1; 1 \leq i \leq n$$

b. untuk $n > 3$

$$c_{14}(px_i) = 2i-1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{14}(py_i) = 2i; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{14}(x_iy_i) = \begin{cases} 2n-1, \ i = 1 \\ 2i-3, \ 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$c_{14}(x_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+1, \ 1 \leq i \leq n-1 \\ 1, \ i = n \end{cases}$$

$$c_{14}(y_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+2, \ 1 \leq i \leq n-1 \\ 2, \ i = n \end{cases}$$

$$c_{14}(x_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+3, \ 1 \leq i \leq n-2 \\ 1, \ i = n-1 \\ 3, \ i = n \end{cases}$$

$$c_{14}(y_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+4, \ 1 \leq i \leq n-2 \\ 4, \ i = n-1 \\ 2, \ i = n \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{14} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah $\lambda(amal\ (Bt_3, v, n)) \leq 2n$. Karena $\lambda(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n$ dan $\lambda(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n$, maka $\lambda(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$, sehingga $\lambda(amal(Bt_3, v, n)) = ... = \lambda_n(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$.

Kasus 2. Terdapat dua syarat untuk membuktikan $\lambda_{n+1 \leq r \leq 2n-1}(amal(Bt_3, v, n))$ yaitu sebagai berikut;

a. untuk $n = 3$

Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_{n+1}(G) \geq \lambda_n(G)$, maka $\lambda_{n+1}(amal\ (Bt_3, v, n)) \geq 2n$. Misal $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$ seperti fungsi pewarnaan c_{14} maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi $z_2^1x_1$ diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = 4$, $|c(N(e))| = 3$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{4, 4\} = 4$, sehingga $3 \ngeq 4$. Jadi, batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n+1$.

b. untuk $n > 3$
Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_{n+1}(G) \geq \lambda_n(G)$, maka $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n$. Misal $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$ seperti pada fungsi pewarnaan c_{14}, maka tidak ada jumlah warna sisi yang bersisian tidak lebih besar atau sama dengan nilai antara dari r dan jumlah derajat kedua titik yang bertetangga dikurangi 2, sehingga fungsi c_{14} bagian b juga berlaku untuk $n+1$ dinamis, maka $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n$.

Selanjutnya untuk menunjukan bahwa $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n+1$ dan λ_{n+1} $(amal\ (Bt_3, v, n)) \leq 2n$ dengan mewarnai $E(amal(Bt_3, v, n))$ seperti pada fungsi c_{15}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_{15} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, c_{15} : $E(amal(Bt_3, v, n)) \rightarrow D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

a. untuk $n = 3$

$$c_{15}(px_i) = 2i - 1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{15}(py_i) = 2i; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{15}(x_iy_i) = 2n + 1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{15}(x_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+1, \ 1 \leq i \leq n-1 \\ 1, \ i = n \end{cases}$$
$$c_{15}(y_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+2, \ 1 \leq i \leq n-1 \\ 2, \ i = n \end{cases}$$
$$c_{15}(x_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+3, \ 1 \leq i \leq n-2 \\ 1, \ i = n-1 \\ 3, \ i = n \end{cases}$$
$$c_{15}(y_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+4, \ 1 \leq i \leq n-2 \\ 4, \ i = n-1 \\ 2, \ i = n \end{cases}$$

b. untuk $n > 3$

$$c_{15}(px_i) = 2i - 1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{15}(py_i) = 2i; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{15}(x_iy_i) = \begin{cases} 2n-1, \ i = 1 \\ 2i-3, \ 2 \leq i \leq n \end{cases}$$
$$c_{15}(x_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+1, \ 1 \leq i \leq n-1 \\ 1, \ i = n \end{cases}$$

$$c_{15}(y_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+2, & 1 \leq i \leq n-1 \\ 2, & i = n \end{cases}$$

$$c_{15}(x_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+3, & 1 \leq i \leq n-2 \\ 1, & i = n-1 \\ 3, & i = n \end{cases}$$

$$c_{15}(y_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+4, & 1 \leq i \leq n-2 \\ 4, & i = n-1 \\ 2, & i = n \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{15} terlihat bahwa;

a. untuk $n = 3$
Bilangan kromatik sisi adalah $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n + 1$. Karena $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n+1$ dan $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n+1$, maka $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 1$, sehingga $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = \cdots = \lambda_{2n-1}$ $(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 1$

b. untuk $n > 3$
Bilangan kromatik sisi adalah $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n$. Karena λ_{n+1} $(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n$ dan $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n$, maka $\lambda_{n+1}(amal$ $(Bt_3, v, n)) = 2n$, sehingga $\lambda_{n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = ... = \lambda_{2n-1}(amal(Bt_3,$ $v, n)) = 2n$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_{2n}(G) \geq \lambda_{2n-1}(G)$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n+1$ dan $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n$. Misal $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 1$ seperti pada fungsi pewarnaan c_{15} bagian a, maka tidak ada jumlah warna sisi yang bersisian tidak lebih besar atau sama dengan nilai minimal antara r dan jumlah derajat kedua titik yang bertetangga dikurangi 2, sehingga fungsi tesebut juga berlaku untuk $2n$ dinamis dengan $n = 3$, maka $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n + 1$. Sedangkan untuk $n > 3$, misal $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$ seperti fungsi pewarnaan c_{15} bagian b maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi px_1 diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = 2n + 2$, $|c(N(e))| = 2n - 1$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{2n, 2n + 2\} = 2n$, sehingga $2n - 1 \not\geq 2n$. Jadi, batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n + 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n + 1$. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n + 1$ dengan mewarnai $E(amal(Bt_3, v, n))$ seperti pada fungsi c_{16}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna dan c_{16} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_{16} : E(amal(Bt_3, v, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$c_{16}(px_i) = 2i - 1; 1 \le i \le n$$
$$c_{16}(py_i) = 2i; 1 \le i \le n$$
$$c_{16}(x_iy_i) = 2n + 1; 1 \le i \le n$$
$$c_{16}(x_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+1, \ 1 \le i \le n-1 \\ 1, \ i = n \end{cases}$$
$$c_{16}(y_iz_1^i) = \begin{cases} 2i+2, \ 1 \le i \le n-1 \\ 2, \ i = n \end{cases}$$
$$c_{16}(x_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+3, \ 1 \le i \le n-2 \\ 1, \ i = n-1 \\ 3, \ i = n \end{cases}$$
$$c_{16}(y_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+4, \ 1 \le i \le n-2 \\ 4, \ i = n-1 \\ 2, \ i = n \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{16} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah $\lambda_{2n}(amal (Bt_3, v, n)) \le 2n+1$. Karena $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) \le 2n+1$ dan $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) \ge 2n + 1$, maka $\lambda_{2n}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 1$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_{2n+1}(G) \ge \lambda_{2n}(G)$, maka $\lambda_{2n+1} (amal(Bt_3, v, n)) \ge 2n+1$. Misal $\lambda_{2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+1$ seperti fungsi pewarnaan c_{16} maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi px_1 diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = 2n + 2$, $|c(N(e))| = 2n$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{2n + 1, 2n + 2\} = 2n + 1$, sehingga $2n \not\ge 2n + 1$. Misal $\lambda_{2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+2$ seperti yang diilustrasikan oleh pewaraan graf $amal(Bt_3, v, 4)$ pada Gambar 4.18, maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi px_1 diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = 10$, $|c(N(e))| = 8$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{9, 10\} = 9$, maka $8 \not\ge 9$. Jadi, batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_{2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \ge 2n + 3$.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_{2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \le 2n + 3$ dengan mewarnai $E(amal(Bt_3, v, n))$ seperti pada fungsi c_{17}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_{17} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_{17} : E(amal(Bt_3, v, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$c_{17}(px_i) = 2i - 1; 1 \le i \le n$$
$$c_{17}(py_i) = 2i; 1 \le i \le n$$
$$c_{17}(x_iy_i) = 2n + 3; 1 \le i \le n$$

$$c_{17}(x_iz_1^i) = 2n+1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{17}(y_iz_1^i) = 2n+2; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{17}(x_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+3, \ 1 \leq i \leq n-2 \\ 1, \ i = n-1 \\ 3, \ i = n \end{cases}$$
$$c_{17}(y_iz_2^i) = \begin{cases} 2i+4, \ 1 \leq i \leq n-2 \\ 4, \ i = n-1 \\ 2, \ i = n \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{17} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah λ_{2n+1} $(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n+3$. Karena $\lambda_{2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n+3$ dan $\lambda_{2n+1}(amal\ (Bt_3, v, n)) \geq 2n+3$, maka $\lambda_{2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+3$.

Kasus 5. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_{2n+2}(G) \geq \lambda_{2n+1}(G)$, maka λ_{2n+2} $(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n+3$. Misal $\lambda_{2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+3$ seperti fungsi pewarnaan c_{17} maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi px_1 diperoleh $d(u)+d(v)-2 = 2n+2$, $|c(N(e))| = 2n+1$ dan $\min\{r, d(u)+d(v)-2\} = \min\{2n+2, 2n+2\} = 2n+2$, sehingga $2n+1 \ngeq 2n+2$. Misal $\lambda_{2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+4$ seperti yang diilustrasikan oleh pewaraan graf $amal(Bt_3, v, 4)$ pada Gambar 4.19, maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi px_1 diperoleh $d(u)+d(v)-2 = 10$, $|c(N(e))| = 9$ dan $\min\{r, d(u)+d(v)-2\} = \min\{10, 10\} = 10$, sehingga $9 \ngeq 10$. Jadi, batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_{2n+2}(amal\ (Bt_3, v, n)) \geq 2n+5$.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_{2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n+5$ dengan mewarnai $E(amal(Bt_3, v, n))$ seperti pada fungsi c_{18}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna dan c_{18} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_{18} : E(amal(Bt_3, v, n)) \rightarrow D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$c_{18}(px_i) = 2i-1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{18}(py_i) = 2i; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{18}(x_iy_i) = 2n+5; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{18}(x_iz_1^i) = 2n+1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{18}(y_iz_1^i) = 2n+2; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{18}(x_iz_2^i) = 2n+3; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{18}(y_iz_2^i) = 2n+4; 1 \leq i \leq n$$

Dari fungsi pewarnaan c_{18} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah λ_{2n+2} $(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n+5$. Karena λ_{2n+2} $(amal(Bt_3, v, n)) \leq 2n+5$ dan λ_{2n+2} $(amal(Bt_3, v, n)) \geq 2n+5$, maka $\lambda_{2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+5$. Pada graf

$amal(Bt_3, v, n)$ nilai dari $\max\{d(u) + d(v) - 2\} = 2n + 2$. Dengan demikian fungsi pewarnaan c_{18} juga berlaku untuk r lainnya, dimana $r \geq 2n + 2$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 2n + 2$ nilai $\min\{r, \max\{d(u) + d(v) - 2\}\} = \max\{d(u)+d(v)-2\} = 2n+2$. Oleh karena itu, nilai bilangan kromatik dinamis $\lambda_{r>2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) = \lambda_{2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n + 5$. Berdasarkan uraian diatas, maka Teorema 2.2 terbukti. □

Selanjutnya adalah Teorema nilai kromatik pewarnaan sisi r-dinamis dari graf hasil operasi $Amal(S_4, v, n)$, berikut Teorema beserta pembuktiannya.

◇ **Teorema 0.3** *Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r-dinamis pada graf $G = amal(S_4, v, n)$ adalah:*

$$\lambda_{r\leq n-1}(amal(S_4, v, n)) = \begin{cases} 4, & n = 3 \\ n, & n > 3 \end{cases}$$

$$\lambda_{r=n}(amal(S_4, v, n)) = n + 1$$
$$\lambda_{r=n+1}(amal(S_4, v, n)) = n + 2$$
$$\lambda_{r\geq n+2}(amal(S_4, v, n)) = n + 3$$

Bukti. $Amal(S_4, v, n)$ memiliki himpunan titik $V(amal(S_4, v, n)) = \{x_i, y^i_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\} \cup \{p\}$ dan himpunan sisi $E(amal\ (S_4, v, n)) = \{x_i y^i_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\} \cup \{px_i; 1 \leq i \leq n\}$, sehingga $p =\mid V(amal(S_4, v, n)) \mid = 4n + 1$ dan $q =\mid E(amal(S_4, v, n)) \mid= 4n$, serta $\Delta(amal(S_4, v, n)) = 4$ untuk $n = 3$ dan $\Delta(amal(S_4, v, n)) = n$ untuk $n > 3$.

Kasus 1. Terdapat dua syarat untuk membuktikan $\lambda_{r\leq n-1}(amal(S_4, v, n))$ yaitu sebagai berikut;

a. untuk $n = 3$
   Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\Delta(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta(G)+1$, sehingga $\lambda(amal\ (S_4, v, n)) \geq 4$.

b. untuk $n > 3$
   Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\Delta(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta(G)+1$, sehingga $\lambda(amal\ (S_4, v, n)) \geq n$.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda(amal(S_4, v, n)) \leq 4$ dan $\lambda(amal\ (S_4, v, n)) \leq n$ dengan mewarnai $E(amal(S_4, v, n))$ seperti pada fungsi c_{19}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_{19} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_{19} : E(amal(S_4, v, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

a. untuk $n = 3$

$$c_{19}(px_i) = i; 1 \leq i \leq 3$$
$$c_{19}(x_i y_1^i) = \begin{cases} 1,\ i = 3 \\ i+1,\ i = 1,2 \end{cases}$$
$$c_{19}(x_i y_2^i) = \begin{cases} i-1,\ i = 2,3 \\ 3,\ i = 1 \end{cases}$$
$$c_{19}(x_i z_3^i) = 4; 1 \leq i \leq 3$$

b. untuk $n > 3$

$$c_{19}(px_i) = i; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{19}(x_i y_1^i) = \begin{cases} 1,\ i = n \\ i+1,\ 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$
$$c_{19}(x_i y_2^i) = \begin{cases} 1,\ i = n-1 \\ 2,\ i = n \\ i+2,\ 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$
$$c_{19}(x_i z_3^i) = \begin{cases} 1,\ i = n-2 \\ 2,\ i = n-1 \\ 3,\ i = n \\ i+3,\ 1 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{19} terlihat bahwa;

a. untuk $n = 3$
Bilangan kromatik sisi adalah $\lambda(amal(S_4, v, n)) \leq 4$. Karena $\lambda(amal(S_4, v, n)) \leq 4$ dan $\lambda(amal(S_4, v, n)) \geq 4$, maka $\lambda(amal(S_4, v, n)) = 4$, sehingga $\lambda(amal(S_4, v, n)) = ... = \lambda_{n-1}(amal(S_4, v, n)) = 4$

b. untuk $n > 3$
Bilangan kromatik sisi adalah $\lambda(amal(S_4, v, n)) \leq n$. Karena $\lambda(amal(S_4, v, n)) \leq n$ dan $\lambda(amal(S_4, v, n)) \geq n$, maka $\lambda(amal(S_4, v, n)) = n$, sehingga $\lambda(amal(S_4, v, n)) = ... = \lambda_{n-1}(amal(S_4, v, n)) = n$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_n(G) \geq \lambda_{n-1}(G)$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) \geq 4$ atau $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) \geq n$. Misal $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) = 4$ seperti pada fungsi pewarnaan c_{19} bagian a, maka tidak ada jumlah warna sisi yang bersisian tidak lebih besar atau sama dengan nilai minimal antara r dan jumlah derajat kedua titik yang bertetangga dikurangi 2 sehingga fungsi pewarnaan c_{19} bagian a juga berlaku untuk n dinamis dengan $n = 3$, maka $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) \geq 4$. Sedangkan untuk $n > 3$ misal $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) = n$ seperti fungsi pewarnaan c_{19} bagian b maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi px_1 diperoleh $d(u)+d(v)-2 = n+2$, $|c(N(e))| = n-1$ dan $\min\{r, d(u)+d(v)-2\} = \min\{n, n+2\} = n$, sehingga $n - 1 \not\geq n$. Jadi, batas bawah yang paling baik yaitu $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) \geq n + 1$. Dari n dinamis dengan $n = 3$ adalah $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) = 4$ terlihat bahwa $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) = n + 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) \geq n + 1$. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_n(amal(S_4, v,\ n)) \leq n + 1$ de-ngan mewarnai $E(amal(S_4, v, n))$ seperti pada fungsi c_{20}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna maka c_{20} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_{20} : E(amal(S_4, v, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

a. untuk $n = 3$

$$c_{20}(px_i) = i; 1 \leq i \leq 3$$

$$c_{20}(x_i y_1^i) = \begin{cases} 1,\ i = 3 \\ i+1,\ i = 1, 2 \end{cases}$$

$$c_{20}(x_i y_2^i) = \begin{cases} i-1,\ i = 2, 3 \\ 3,\ i = 1 \end{cases}$$

$$c_{20}(x_i z_3^i) = 4; 1 \leq i \leq 3$$

b. untuk $n > 3$

$$c_{20}(px_i) = i; 1 \leq i \leq n$$

$$c_{20}(x_i y_1^i) = \begin{cases} 1,\ i = n \\ i+1,\ 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$c_{20}(x_i y_2^i) = \begin{cases} 1,\ i = n-1 \\ 2,\ i = n \\ i+2,\ 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

$$c_{20}(x_i z_3^i) = n + 1$$

Dari fungsi pewarnaan c_{20} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah $\lambda_n(amal$ $(S_4, v, n)) \leq n + 1$. Karena $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) \leq n + 1$ dan $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) \geq n + 1$, maka $\lambda_n(amal(S_4, v, n)) = n + 1$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_{n+1}(G) \geq \lambda_n(G)$, maka λ_{n+1} $(amal$ $(S_4, v, n)) \geq n+1$. Misal $\lambda_{n+1}(amal(S_4, v, n)) = n+1$ seperti fungsi pewarnaan c_{20} maka definisi pewarnaan sisi r-dinamis tidak terpenuhi. Hal ini disebabkan oleh sisi px_1 diperoleh $d(u) + d(v) - 2 = n + 2$, $|c(N(e))| = n$ dan $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = \min\{n+1, n+2\} = n+1$, sehingga $n \ngeq n+1$. Jadi, batas bawah yang paling baik yaitu $\lambda_{n+1}(amal(S_4, v, n)) \geq n+2$. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_{n+1}(amal(S_4, v, n)) \leq n+2$ dengan mewarnai $E(amal(S_4, v, n))$ seperti pada fungsi c_{21}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna dan c_{21} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_{21} : E(amal(S_4, v, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$c_{21}(px_i) = i; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{21}(x_i y_1^i) = n+1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{21}(x_i y_2^i) = \begin{cases} 1, \ i = n \\ i+1, \ 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$
$$c_{21}(x_i z_3^i) = n+2; 1 \leq i \leq n$$

Dari fungsi pewarnaan c_{21} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah λ_{n+1} $(amal\ (S_4, v, n)) \leq n{+}2$. Karena $\lambda_{n+1}(amal\ (S_4, v, n)) \leq n{+}2$ dan $\lambda_{n+1}(amal(S_4,$ $v, n)) \geq n+2$, maka $\lambda_{n+1}(amal(S_4, v, n)) = n+2$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_{n+2}(G) \geq \lambda_{n+1}(G)$, maka λ_{n+2} $(amal(S_4, v, n)) \geq n+2$. Misal $\lambda_{n+2}(amal(S_4, v, n)) = n+2$ maka fungsi pewarnaannya adalah pada c_{21}. Dengan demikian untuk $d(u)+d(v)-2 = n+2$, misal px_1, $|c(N(e))| = n{+}1$ dan $\min\{r, d(u){+}d(v){-}2\} = \min\{n{+}2, n{+}2\} = n{+}2$, maka $n+1 \ngeq n+2$. Jadi, batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_{n+2}(amal(S_4, v, n)) \geq n+3$. Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $\lambda_{n+2}(amal(S_4, v, n)) \leq n+3$ dengan mewarnai $E(amal(S_4, v, n))$ seperti pada fungsi c_{22}. Misal $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dari k-warna dan c_{22} merupakan fungsi yang memetakan setiap sisi ke himpunan warna D, $c_{22} : E(amal(S_4, v, n)) \to D$, sehingga pemetaan setiap sisi ke himpunan warna D adalah sebagai berikut:

$$c_{22}(px_i) = i; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{22}(x_i y_1^i) = n+1; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{22}(x_i y_2^i) = n+2; 1 \leq i \leq n$$
$$c_{22}(x_i z_3^i) = n+3; 1 \leq i \leq n$$

Dari fungsi pewarnaan c_{22} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi adalah λ_{n+2} $(amal\ (S_4, v, n)) \leq n{+}3$. Karena $\lambda_{n+2}(amal(S_4, v, n)) \leq n{+}3$ dan $\lambda_{n+2}(amal(S_4,$ $v, n)) \geq n+3$, maka $\lambda_{n+2}(amal(S_4, v, n)) = n+3$. Pada graf $amal(S_4, v, n)$ nilai $\max\{d(u) + d(v) - 2\} = n+2$. Dengan demikian fungsi pewarnaan c_{21}

juga berlaku untuk r lainnya, dimana $r \geq n+2$. Hal ini disebabkan oleh nilai min$\{r$,max$\{d(u)+d(v)-2\} = n+2$. Oleh karena itu, nilai kromatik dinamis $\lambda_{r>n+2}(amal(S_4, v, n)) = \lambda_{n+2}(amal(S_4, v, n)) = n+3$. Berdasarkan uraian diatas, maka Teorema 2.3 terbukti. □

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa Graf $gshack(H_3, e, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(gshack\ (H_3, e, n)) = \lambda_d(gshack\ (H_3, e, n)) = \lambda_3(gshack(H_3, e, n)) = 4$, $\lambda_4(gshack(H_3,\ e, n)) = 6$, $\lambda_5(gshack(H_3, e, n)) = 7$, dan $\lambda_{r\geq 6}(gshack(H_3, e, n)) = 9$. Graf $amal(Bt_3, v, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda_{r\leq n}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n$, $\lambda_{n+1\leq r\leq 2n-1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+1$, untuk $n = 3$ dan $\lambda_{n+1\leq r\leq 2n-1}(amal(Bt_3,\ v, n)) = 2n$ untuk $n > 3$, $\lambda_{r=2n}(amal\ (Bt_3, v, n)) = 2n+1$, $\lambda_{r=2n+1}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+3$, serta $\lambda_{r\geq 2n+2}(amal(Bt_3, v, n)) = 2n+5$. Graf $amal(S_4, v, n)$ dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda_{r\leq n-1}(amal(S_4, v, n)) = 4$ untuk $n = 3$ dan $\lambda_{r\leq n-1}(amal(S_4, v, n)) = n$ untuk $n > 3$, $\lambda_{r=n}(amal(S_4, v, n)) = n+1$, $\lambda_{r=n+1}(amal(S_4, v, n)) = n+2$, Serta $\lambda_{r\geq n+2}(amal(S_4, v, n)) = n+3$.

Masalah Terbuka 1 *Tentukan nilai kromatik pewarnaan sisi r-dinamis dari grafhasil operasi shaclke dan amalgamasi antara dua graf yang lain. Tentukan ni-lai kromatik pewarnaan sisi r-dinamis dari graf hasil operasi* $gshack(H_m, e, n)$, $Amal(Bt_m, v, n)$ *dan* $Amal(S_m, v, n)$.

Referensi

[1] Ardiansyah, R dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf, Jurnal Sains dan Seni Pomits, **2**(1), 2337–3520.

[2] Reni Wijaya. 2013. Bilangan Rainbow Connection untuk Graf Komplemen, Matematika UNAND, **2**, 9-12.

[3] Gema Histamedika. 2012. Rainbow Connection pada Beberapa Graf, Matematika UNAND, **2**, 17-25.

[4] Randhi Nanang Darmawan. 2014. Rainbow Connection Number of Prism and Product of Two Graphs, Seminar Nasional Pendidikan Matematika SENDIKMAD UAD, **1** No.1, 449-456.

[5] Artanty Nastiti. 2014. Rainbow Connection Number of Special Graph and Its Operation, Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik FMIPA UNEJ, **1** No.1, 583-587.

[6] Arnasyitha Yulianti. 2014. Rainbow Connection Number Pada Operasi Graf, Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik FMIPA UNEJ, **1** No.1, 521-525.

[7] Alfian Yulia Harsya. 2014. Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel dan Graf Bintang, Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik FMIPA UNEJ,**1** No.1,498-505.

[8] Schiermeyer. 2008. Rainbow Connection in Graph with Minimum Degree Three. Matematika Universitas Brawijaya, 16, 432-437.

[9] Syafrizal. 2013. On the rainbow connection for some corona graphs, Applied Mathematical Sciences, **7** No.100, 4975-4979.

[10] Slamin. 2009. Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf, Matematika Universitas Jember, Jember: Universitas Jember.

[11] G. Chartrand and G. Kalamazoo and S. Johns and K. A. Valley and McKeon. 2008. Rainbow Connection in Graphs, Math. Bohem, 133, No. 2, 85-98.

[12] R. Ardiyansah and Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf, Jurnal Sains dan Seni Pomits, 2(1).

[13] Dafik. 2007. Structural Properties and Labeling of Graph, School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia.

[14] S. Endrayana. 2013. Pelabelan Product Cordial pada Tensor Product Path dan Sikel, Matematika Universitas Diponegoro.

[15] Dafik and S. Setiawani and K.M.F. Azizah. 2015. Generalized Shackle of Fans is a Super (a, d)-edge Anti magic Total Graph, Submitted, Applied Mathematical Sciences.